Die Verallgemeinerung der Theorie des Gruppenproduktes von Zappa—Casadio.

Von L. RÉDEI und J. SZÉP in Szeged.

Unsere Arbeit enthält die Lösung des folgenden Problems. Zu zwei gegebenen Gruppen G, Γ sind die sämtlichen Gruppen $\mathfrak{G}$ zu bestimmen, für die

(1) $$\mathfrak{G} = G'\Gamma'$$

ist und die Isomorphien

(2) $$G' \approx G, \quad \Gamma' \approx \Gamma$$

gelten. Wir meinen dieses Problem in der vollen Allgemeinheit, so nämlich, daß der Durchschnitt

(3) $$G' \cap \Gamma'$$

eine beliebige Untergruppe von $\mathfrak{G}$ sein darf (die also natürlich isomorph mit je einer Untergruppe von G und Γ sein muß). ZAPPA[1]) und CASADIO[2]) haben diejenigen Lösungen angegeben, für die (3) das Einselement bzw. irgendein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist.

Kleine lateinische und griechische Buchstaben bezeichnen beliebige Elemente von G bzw. Γ. Insbesondere bezeichnen e und ε das Einselement von G bzw. Γ. Stets, wenn die Rede von einer Untergruppe G_* oder Γ_* von G bzw. Γ sein wird, so sollen a_* und α_* beliebige Elemente von G_* bzw. Γ_* bezeichnen.

Zu unserem Zweck betrachten wir ein Funktionenpaar

(4) $$a^\alpha \ (\in G), \quad \alpha^a \ (\in \Gamma),$$

stets unterworfen den „Anfangsbedingungen"

(5) $$a^\varepsilon = a, \ e^\alpha = e, \quad \alpha^e = \alpha, \ \varepsilon^a = \varepsilon.$$

Wir definieren dann in der Menge der Elementenpaare

(6) $$(a, \alpha)$$

---

1) G. ZAPPA, Sulla construzione dei gruppi prodotto di due dati sottogruppi permutabili tra loro, *Atti Secondo Congresso Unione Mat. Italiana*, Bologna 1940, 119—125.

2) G. CASADIO, Construzione dei gruppi come prodotto di sottogruppi permutabili, *Rendiconti di Mat. Univ. Roma*, **2** (1941), 348—360.

die Multiplikation[3])

$$(7)\qquad (a, \alpha)(b, \beta) = (ab^{\alpha}, \beta\alpha^{b})$$

und bezeichnen mit $\mathfrak{M}$ die so entstandene (multiplikative) Struktur, die natürlich nicht assoziativ zu sein braucht. Offenbar hat $\mathfrak{M}$ wegen (5) das Einselement (e, ε).

Im allgemeinen bezeichnen wir die einer kompatiblen Klasseneinteilung C von $\mathfrak{M}$ zugehörige Faktorstruktur mit $\mathfrak{M}/C$. Das hat nach BOURBAKI[4]) den Sinn, daß die C zugehörige Äquivalenzrelation, die wir mit „$\equiv$" bezeichnen, eine Kongruenzrelation ist, d. h. die Eigenschaften[5])

$$(8)\qquad (a, \alpha) \equiv (b, \beta) \Longrightarrow (c, \gamma)(a\alpha) \equiv (c, \gamma)(b, \beta),\ (a, \alpha)(c, \gamma) \equiv (b, \beta)(c, \gamma)$$

hat, und in $\mathfrak{M}/C$ die Multiplikation

$$(9)\qquad \overline{(a, \alpha)}\,\overline{(b, \beta)} = \overline{(a, \alpha)(b, \beta)}$$

zu Grunde gelegt ist, wobei $\overline{(r, \varrho)}$ die durch (r, ϱ) representierte Klasse bezeichnet. Unter den so definierten multiplikativen Strukturen $\mathfrak{M}/C$ können auch Gruppen vorkommen (sogar auch dann, wenn selbst $\mathfrak{M}$ keine Gruppe ist).

Wir werden bekommen, daß die sämtlichen Lösungen unseres Problems (bis auf Isomorphie) mit gewissen speziellen $\mathfrak{M}/C$ übereinstimmen, die nämlich so entstehen, daß man das Funktionenpaar (4) und die Klasseneinteilung C passenden weiteren Einschränkungen unterwirft. Und zwar gilt der folgende:

Satz. *Man bezeichne mit G_*, Γ_* zwei isomorphe Untergruppen von G, bzw. Γ, gebe zwischen ihnen einen Isomorphismus*[6])

$$(10)\qquad G_* \approx \Gamma_* \quad (a_* \to Sa_*)$$

an und definiere in $\mathfrak{M}$ die Äquivalenzrelation[7])

$$(11)\qquad (a, \alpha) \equiv (b, \beta) \Longleftrightarrow S(a^{-1}b) = \alpha^{-1}\beta.$$

Damit diese eine Kongruenzrelation und die zugehörige Faktorstruktur $\mathfrak{M}/C$ eine Gruppe ist, ist notwendig und hinreichend, daß (4) *(außer* (5)*) die fol-*

---

[3]) Man könnte mit ähnlichem Erfolg

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab^{\alpha}, \alpha^{b}\beta)$$

setzen, für uns wird aber hier die obige Definition (7) bequemer.

[4]) N. BOURBAKI, *Algèbre* I *(Structures algébriques)* (Actualités scientifiques et industrielles 943, Paris 1942), 1—165, insb. S. 45.

[5]) „$\Longrightarrow$" bezeichnet „hat zur Folge".

[6]) Mit (10) bezeichnen wir, daß S eine isomorphe Abbildung von G_* auf Γ_* ist. Dabei bezeichnet Sa_* das Bild von a_*.

[7]) „$\Longleftrightarrow$" bezeichnet „ist gleichbedeutend mit". — Mit $Sr = \varrho$ oder $r = S^{-1}\varrho$ meinen wir stets den Inbegriff der drei Aussagen: $r \in G_*$, $\varrho \in \Gamma_*$, $Sr = \varrho$.

genden Bedingungen erfüllt:

$$S(a_*^{\alpha}) = \alpha^{-1} S_{a_*} \alpha^{a_*}, \tag{12}$$

$$S^{-1}(\alpha_*^{a}) = a^{-1} S_{\alpha_*}^{-1} a^{\alpha_*}, \tag{13}$$

$$S[(c^{\beta\alpha})^{-1}(c^{\beta})^{\alpha}] = ((\beta\alpha)^{c})^{-1} \beta^{c} \alpha^{c^{\beta}}, \tag{14}$$

$$S^{-1}[(\alpha^{bc})^{-1}(\alpha^{b})^{c}] = ((bc)^{\alpha})^{-1} b^{\alpha} c^{\alpha^{b}}. \tag{15}$$

Diese Gruppen

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{M}/C \tag{16}$$

sind (bis auf Isomorphie) die sämtlichen Lösungen unseres Problems. Und zwar bilden in der Gruppe (16) *die* $\overline{(a, \varepsilon)}$ *bzw.* $\overline{(e, \alpha)}$ *je eine Untergruppe* G', Γ' *mit den Eigenschaften* (1), (2). *Dabei ist der Durchschnitt* (3) *isomorph mit* G_* *(also auch mit* Γ_**), und zwar sind die* $\overline{(a_*, \varepsilon)}$ *die sämtlichen verschiedenen Elemente dieses Durchschnitts.*

Bemerkung. Man sieht, daß (12), (13) zueinander *dual* sind, worunter wir verstehen, daß sie mit Vertauschung von G, Γ und Ersetzung von S durch S^{-1} auseinander hervorgehen. Ebenfalls sind (14), (15) dual.[8])

Zum Beweis des Satzes stellen wir zunächst die Bedingungen der Existenz von $\mathfrak{M}/C$, d. h. die der Kompatibilität der durch (11) gelieferten Klasseneinteilung C auf. Nach (11) lassen sich zwei beliebige äquivalente Elemente von $\mathfrak{M}$ in der Form (a, α), $(aa_*, \alpha S a_*)$ annehmen. Werden diese zuerst von links, dann von rechts mit (b, β) multipliziert, so erhält man nach (7) die Produkte

$$(ba^{\beta}, \alpha\beta^{a}),\ (b(aa_*)^{\beta}, \alpha S a_* \cdot \beta^{aa_*})$$

bzw.

$$(ab^{\alpha}, \beta\alpha^{b}),\ (aa_* b^{\alpha S a_*},\ \beta(\alpha S a_*)^{b}).$$

Wegen (8), (11) existiert also $\mathfrak{M}/C$ dann und nur dann, wenn

$$S[(a^{\beta})^{-1}(aa_*)^{\beta}] = (\beta^{a})^{-1} S a_* \cdot \beta^{aa_*}, \tag{17}$$

$$S[(b^{\alpha})^{-1} a_* b^{\alpha S a_*}] = (\alpha^{b})^{-1}(\alpha S a_*)^{b} \tag{18}$$

gelten.

Indem wir (17), (18) voraussetzen, wollen wir jetzt die Bedingungen aufstellen, damit $\mathfrak{M}/C$ assoziativ ist. Hierzu ist nach (7) und (9) notwendig und hinreichend:

$$(ab^{\alpha}, \beta\alpha^{b})(c, \gamma) \equiv (a, \alpha)(bc^{\beta}, \gamma\beta^{c}),$$

d. h.

$$(ab^{\alpha} c^{\beta\alpha^{b}}, \gamma(\beta\alpha^{b})^{c}) \equiv (a(bc^{\beta})^{\alpha}, \gamma\beta^{c}\alpha^{bc^{\beta}}).$$

Nach (11) schreibt sich hierfür

$$S[((bc^{\beta})^{\alpha})^{-1} b^{\alpha} c^{\beta\alpha^{b}}] = (\alpha^{bc^{\beta}})^{-1}(\beta^{c})^{-1}(\beta\alpha^{b})^{c}. \tag{19}$$

---

[8]) Obige Dualität würde eine weniger einfache Form annehmen, wenn man die Multiplikation in $\mathfrak{M}$ nach[3]) (statt (7)) definiert.

Setzen wir hier voneinander unabhängig $b=e$, bzw. $\beta=\varepsilon$ ein, so entsteht wegen (5) zuerst (14), dann

$$S[((bc)^{\alpha})^{-1}b^{\alpha}c^{\alpha^{b}}]=(\alpha^{bc})^{-1}(\alpha^{b})^{c}. \tag{20}$$

Wendet man umgekehrt (20) mit c^{β} statt c und (14) mit α^{b} statt α an, multipliziert man die erste dieser zwei Gleichungen von rechts mit der zweiten, so ergibt sich wegen der Homomorphieeigenschaft von S eben die Gleichung (19). Hiernach besteht die gesuchte Assoziativitätsbedingung aus (14) und (20). Wir bemerken auch, daß (20) mit (15) übereinstimmt. Somit drücken (14), (15) die Bedingungen der Assoziativität aus. Bisher haben wir gewonnen, daß $\mathfrak{M}/C$ dann und nur dann (existiert und) assoziativ ist, wenn (17), (18), (14), (15) gelten.

Wir beweisen, daß diese Bedingungen mit (12) bis (15) äquivalent sind. Wir machen das so, daß wir (14), (15) voraussetzen und dann die Äquivalenz von (17), (18) mit (12), (13) zeigen.

Einerseits folgt aus (17) für $a=e$ (unter Berücksichtigung von (5)) die Gleichung (12).

Anderseits folgt aus (15) für $b=a$, $c=a_*$, $\alpha=\beta$ (mit Vertauschung der Seiten)

$$((aa_*)^{\beta})^{-1}a^{\beta}a_*^{\beta^{a}}=S^{-1}[(\beta^{aa_*})^{-1}(\beta^{a})^{a_*}].$$

Aus (12) folgt, daß der dritte Faktor der linken Seite (also auch das Produkt der ersten zwei Faktoren) in G_1 liegt. Somit entsteht durch Anwendung von S

$$S[((a_*a)^{\beta})^{-1}a^{\beta}]\cdot S(a_*^{\beta^{a}})=(\beta^{aa_*})^{-1}(\beta^{a})^{a_*}.$$

Aus (12) folgt

$$S(a_*^{\beta^{a}})=(\beta^{a})^{-1}Sa_*\cdot(\beta^{a})^{a_*}.$$

Aus diesen zwei Gleichungen folgt

$$S[((aa_*)^{\beta})^{-1}a^{\beta}]=(\beta^{aa_*})^{-1}\cdot Sa_*^{-1}\cdot\beta^{a}.$$

Nach Übergehen zum Inversen stimmt dies mit (17) überein.

Wir haben gezeigt:

$$(17)\Longleftrightarrow(12);\quad (12),(15)\Longleftrightarrow(17).$$

Wendet man S^{-1} auf (18) an (und vertauscht die Seiten), so sieht man, daß (18) das Duale von (17) ist. Folglich entsteht aus vorigem nach Dualisierung:

$$(18)\Longleftrightarrow(13);\quad (13),(14)\Longleftrightarrow(18).$$

Beide miteinander beweisen die obige Behauptung, daß nämlich die Bedingungen (17), (18), (14), (15) mit (12) bis (15) äquivalent sind.

Bisher haben wir gezeigt, daß $\mathfrak{M}/C$ dann und nur dann (existiert und) assoziativ ist, wenn (12) bis (15) gelten. Dies genügt aber auch schon, damit

$\mathfrak{M}/C$ eine Gruppe ist. Da nämlich (e, ε) das Einselement von $\mathfrak{M}$ ist, so ist $\overline{(e, \varepsilon)}$ das Einselement von $\mathfrak{M}/C$. Ferner gelten nach (5), (7)

$$(a, \alpha) = (a, \varepsilon)(e, \alpha), \tag{21}$$

$$(a, \varepsilon)(a^{-1}, \varepsilon) = (e, \varepsilon), \quad (e, \alpha)(e, \alpha^{-1}) = (e, \varepsilon). \tag{22}$$

Wenn also $\mathfrak{M}/C$ assoziativ ist, so folgt hieraus

$$\overline{(a, \alpha)}\,\overline{(e, \alpha^{-1})}\,\overline{(a^{-1}, \varepsilon)} = \overline{(e, \varepsilon)},$$

d. h. die Existenz des Rechtsinversen von $\overline{(a, \alpha)}$. Wir haben bewiesen, daß $\mathfrak{M}/C$ dann und nur dann (existiert und) eine Gruppe ist, wenn (12) bis (15) gelten.

Betrachten wir nunmehr die Gruppe (16). Es ist wegen (21), (22) klar, daß die im Satz definierten Untergruppen G', Γ' von $\mathfrak{G}$ existieren und für sie (1), (2) gelten. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{D}$ den Durchschnitt (3). Dieser besteht aus denjenigen Elementen $\overline{(a, \varepsilon)}$, die sich auch als $\overline{(e, \alpha)}$ schreiben lassen. Da nach (11)

$$\overline{(a, \varepsilon)} = \overline{(e, \alpha)} \Longleftrightarrow Sa = \alpha^{-1} \tag{23}$$

gilt, so folgt hieraus wegen (10) offenbar, daß $\mathfrak{D}$ aus den Elementen $\overline{(a_*, \varepsilon)}$ besteht und daß diese Elemente auch schon verschieden sind. Das ergibt wegen (7) auch die Isomorphie $\mathfrak{D} \approx G_*$.

Wir haben nur noch zu zeigen, daß umgekehrt jede Lösung $\mathfrak{G}$ unseres Problems (bis auf Isomorphie) unter den im Satz angegebenen Gruppen $\mathfrak{M}/C$ vorkommt. Indem wir G und Γ auf Grund der Isomorphien (2) in $\mathfrak{G}$ einbetten, können wir $\mathfrak{G}$ in der Form

$$\mathfrak{G} = G\Gamma \tag{24}$$

annehmen, wobei also G, Γ jetzt Untergruppen von $\mathfrak{G}$ sind. Wir setzen

$$G_* = G \cap \Gamma. \tag{25}$$

Wegen (24) erscheinen alle Elemente von $\mathfrak{G}$ in der Form[9])

$$a\alpha^{-1}. \tag{26}$$

Offenbar gilt dabei die Regel

$$a\alpha^{-1} = b\beta^{-1} \Longleftrightarrow a^{-1}b = \alpha^{-1}\beta \in G_*. \tag{27}$$

Wegen (24) läßt sich jedes Produkt $\alpha^{-1}a$ auch in der Form $b\beta^{-1}$ schreiben. Obwohl dabei für b, β (nach (27)) mehrere Möglichkeiten vorliegen, so steht doch nichts im Wege, daß man für jedes Paar a, α ein zugehöriges Paar b, β irgendwie festwählt, wodurch b, β nunmehr (eindeutige) Funktionen von a, α geworden sind. Diese nehmen wir in der Form (4) an. Dann gilt

[9]) Unser Verfahren, daß wir die Elemente von $\mathfrak{G}$ in der Form $a\alpha^{-1}$ statt $a\alpha$ annehmen, ist natürlich unwesentlich und steht damit in Zusammenhang, daß wir die Multiplikation in $\mathfrak{M}$ nach (7) (statt[8])) definiert haben.

$\alpha^{-1}b = b^{\alpha}(\alpha^{b})^{-1}$, also auch

$$a\alpha^{-1}b\beta^{-1} = ab^{\alpha}(\beta\alpha^{b})^{-1}. \tag{28}$$

Da insbesondere $\varepsilon^{-1}a = a\varepsilon^{-1}$, $\alpha^{-1}e = e\alpha^{-1}$ ist, so dürfen wir auch (5) annehmen. Da (4), (5) gelten, so existiert die zugehörige multiplikative Struktur $\mathfrak{M}$, wie wir diese bei (6), (7) definiert haben. Hierfür gilt wegen (7), (28) die Homomorphie

$$\mathfrak{M} \sim \mathfrak{G} \quad ((a, \alpha) \rightarrow a\alpha^{-1}). \tag{29}$$

Bezeichne C die zugehörige (kompatible) Klasseneinteilung von $\mathfrak{M}$, in der nämlich diejenigen Elemente von $\mathfrak{M}$ eine Klasse ausmachen, denen vermöge (29) ein gemeinsames Bild in $\mathfrak{G}$ zugeordnet ist. Kraft dieser Klasseneinteilung gilt also für die zugehörige Äquivalenzrelation:

$$(a, \alpha) \equiv (b, \beta) \Longleftrightarrow a\alpha^{-1} = b\beta^{-1} \Longleftrightarrow a^{-1}b = \alpha^{-1}\beta.$$

Hiernach haben wir es mit einem Spezialfall von (11) zu tun, wobei nämlich in (10) $\Gamma_* = G_*$ gesetzt und für S die identische Abbildung von G_1 (auf sich) genommen wurde. Da ferner aus (29) die Isomorphie

$$\mathfrak{G} \approx \mathfrak{M}/C$$

folgt, so haben wir hiermit den Beweis des Satzes beendet.

B e m e r k u n g. Die in unserem Satz begründete Theorie zeigt viele Ähnlichkeiten mit der Theorie der Schreierschen Gruppenerweiterungen auf. Vergleiche hierüber unsere Arbeit.[10]). Nach dem dortigen Muster läßt sich auch das Transformationsproblem der Gruppen (16) behandeln. Man siehe noch unsere frühere Arbeit.[11]) Wenn insbesondere $G_* = e$ (also $\Gamma_* = \varepsilon$) ist, so ist nur $a_* = e$, $\alpha_* = \varepsilon$ möglich, weshalb jetzt (12), (13) identisch erfüllt sind, ferner besagen (14), (15), daß stets

$$(c^{\beta})^{\alpha} = c^{\beta\alpha}, \qquad (\beta\alpha)^{c} = \beta^{c}\alpha^{c^{\beta}},$$

$$(\alpha^{b})^{c} = \alpha^{bc}, \qquad (bc)^{\alpha} = b^{\alpha}c^{\alpha^{b}}$$

ist. Das sind eben die bekannten Bedingungsgleichungen von ZAPPA.[1])

(Eingegangen am 12 Juli 1955.)

---

10) L. RÉDEI, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journal für die reine und angew. Math.*, **188** (1951), 201—227.

11) J. SZÉP and L. RÉDEI, On factorisable groups, *diese Acta*, **13** (1950), 235—238.